

Magnetostática - continuação

Se a carga flui por uma superfície, ela pode ser descrita por uma densidade de corrente superficial $\vec{K}$.

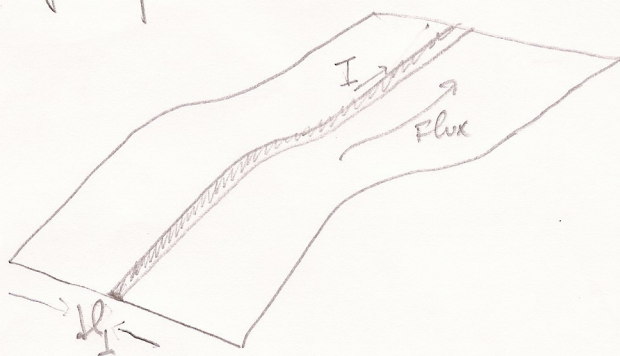


Fig 1

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}}$$

(1)

$\vec{K}$ = corrente por largura (da faixa) perpendicular ao fluxo de carga

Se a densidade de carga superficial móvel é σ e sua vel. é $\vec{v}$

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} \quad (2)$$

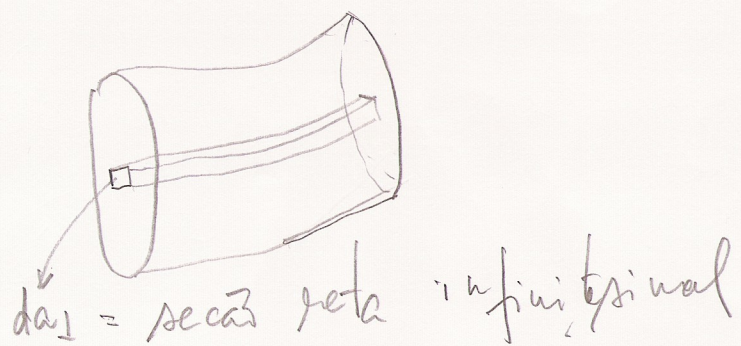
A força magnética na corrente de superfície

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \sigma d\vec{a} = \int (\vec{K} \times \vec{B}) d\vec{a} \quad (3)$$

(compare com $\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \lambda d\ell$)

Em 3 dimensões, o problema pode ser descrito pelo vetor densidade de corrente volumétrica

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}} \quad (4)$$



$\vec{J}$ = corrente por unidade de área perpendicular ao fluxo. Se um pedaço de volume tem densidade de carga ρ com velocidade $\vec{v}$

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad (5)$$

A força magnética sobre a corrente volumétrica

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \rho \, dv = \int (\vec{J} \times \vec{B}) \, dv \quad (6)$$

$\vec{E}_x$ 

corrente I é uniformemente distribuída em um fio de seção reta circular. A área perpendicular ao fluxo $= \pi a^2$

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

Problema

Derive figuras das definições de $\vec{J}$

dada na $\vec{E} = \nabla \phi$ da equação da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Solução:

Como $\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}$

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

A carga total por unidade de tempo deixando volume V recoberto pela superfície S é

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv$$

Mas

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \int \frac{d\rho}{dt} dv$$

então para qualquer volume

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$$

1. Lei de Biot-Savart

Cargas em repouso (estacionárias) $\Rightarrow$
Campos elétricos constantes (eletrostática)

Correntes estacionárias $\Rightarrow$
Campos magnéticos constantes (magnetostática)

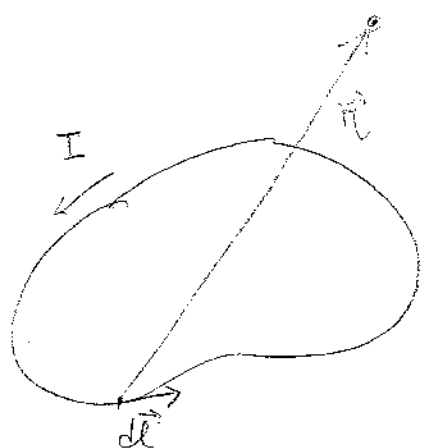
A situação no caso da magnetostática
pode muito bem ser definida pela equação
de continuidade, ou seja, se $\frac{d\rho}{dt} = 0$ então

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

(7)

2. Campos magnéticos em corrente estacionária

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^2} d\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (SI) \quad (8.a)$$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (CGS / \text{Gauss/cm}) \quad (8.b)$$

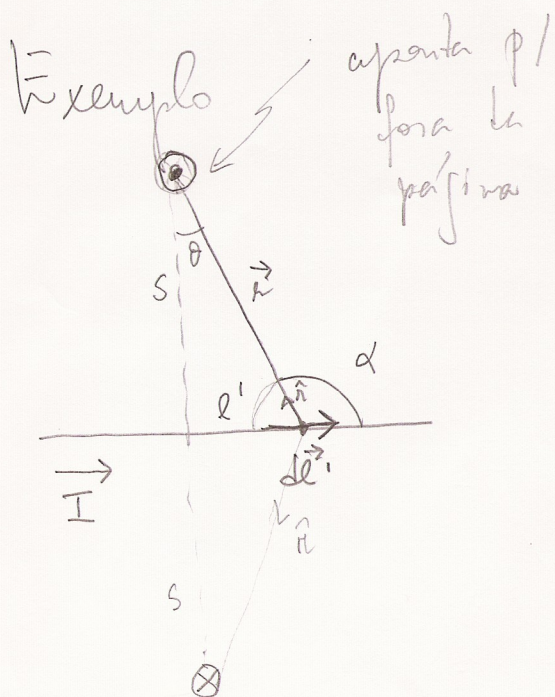
Fig

$\mu_0 = \text{permeabilidade do vácuo} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/A}^2$

$$[B] = T$$

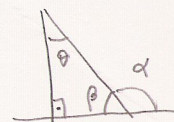
$$1 T = 1 N / A \cdot m$$

Equivalente na magnetostática à lei de Coulomb na eletrostática.



$$|d\vec{l}' \times \hat{r}| = dl' \sin \alpha$$

agora $\theta + \beta + 90^\circ = 180^\circ$
 $\alpha + \theta = 180^\circ$



entao $\boxed{\alpha = 90^\circ - \theta}$

logo

$$\boxed{\sin \alpha = \cos \theta}$$

entao

$$\boxed{|d\vec{l}' \times \hat{r}| = dl' \cos \theta}$$

$$l' = s \tan \theta \Rightarrow$$

$$\boxed{dl' = s \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}$$

$$s = r \cos \theta$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

Portanto

$$|d\vec{l}' \times \hat{r}| = \frac{s \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta}{r^2} = \frac{s d\theta}{r^2 \cos \theta}$$

Caso particular

A lei de Biot-Savart para esse caso particular:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2 \theta}{s} \cdot \frac{s}{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi s} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi s} I (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

Fazendo a integral sobre todo um

ângulo infinito: $\theta_1 = -\pi/2$ e $\theta_2 = \pi/2$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi s} I$$

Problema Encontre a força de atração

entre 2 fios paralelos (longos) que estão
a uma distância s carregados com I_1 e I_2
(ver Figura 4)

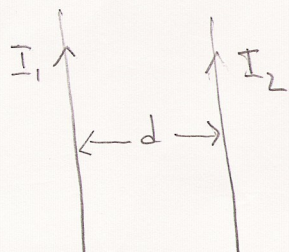


Fig 4

Campo no fio 2
devido ao fio 1

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

Como $\vec{F}_{\text{mag}} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$

Então a força no direção do fio 1 é $F = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} l$

Para superfície e volume a lei
de Biot-Savart torna-se; respective-
mente

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} da' \quad (9)$$

e

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dv' \quad (10)$$

Se agora calculamos:

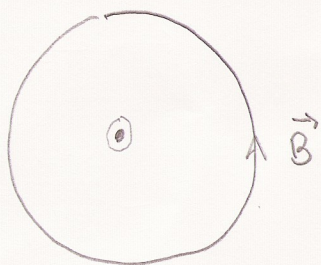


Fig 5

corrente I

saindo p/ fora

da página

Caminho circular centrado no fio

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s} d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint d\ell = \mu_0 I$$

Se
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

Em coordenadas cilíndricas

$$d\vec{\ell} = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

Então para um caminho qualquer fechado centrado no fio

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} s d\phi$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{1}{s} s d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Assuma agora que vários de fios atravessando caminhos fechados:

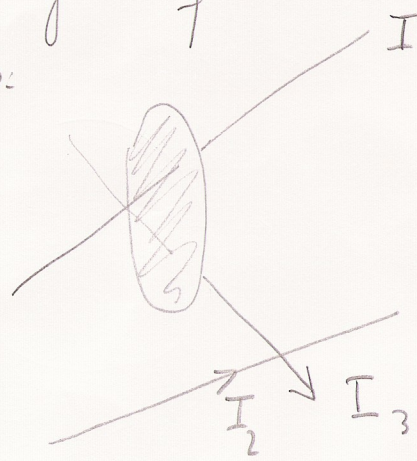


Fig. 6

Cada um deles contribui com $\mu_0 I$, enquanto os fios que não atravessam o caminho fechado contribuem com zero

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

I_{enc} corresponde à corrente total contida no caminho de integração

$$I_{enc} = \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Pelo teorema de Stokes

$$\oint_P \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$$

ou

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

então

$$\boxed{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{J}}$$

Lei de
Ampère

(12)